Realização de estudantes do ensino superior na exploração de um jogo aleatório

Achievement of higher education students in exploring a random game

Realización de estudiantes de educación superior en la exploración de un juego aleatorio

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES, GABRIELA GONÇALVES, PAULA MARIA BARROS

ISSN 1645-4774 | e-ISSN 2183-038X
https://www.eduser.ipb.pt

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

Submetido: 2024-05-15 | Aceite: 2024-06-12 | Publicado: 2024-07-26

Realização de estudantes do ensino superior na exploração de um jogo aleatório

Achievement of higher education students in exploring a random game

Realización de estudiantes de educación superior en la exploración de un juego aleatorio

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[1], GABRIELA GONÇALVES[2], PAULA MARIA BARROS[3]

[1] Universidade do Minho; Braga; Portugal; https://orcid.org/0000-0003-2015-160X; jfernandes@ie.uminho.pt

[2] Instituto Politécnico do Porto; Porto; Portugal; https://orcid.org/0000-0002-3584-5498; gmc@isep.ipp.pt

[3] Instituto Politécnico de Bragança; Bragança; Portugal; https://orcid.org/0000-0002-6297-0868; pbarros@ipb.pt

RESUMO: Neste artigo estuda-se a realização de estudantes do ensino superior politécnico na exploração de um jogo aleatório, tendo em conta os seguintes objetivos: 1) avaliar o desempenho dos estudantes na exploração do jogo; e 2) identificar dificuldades dos estudantes na exploração do jogo. Participaram no estudo 49 estudantes que se encontravam a frequentar o 2º ou o 3º ano de um curso de engenharia de uma instituição de ensino superior do norte de Portugal. Os dados resultaram das resoluções dos estudantes a várias tarefas sobre jogos aleatórios de um breve questionário, sendo aqui estudada apenas uma dessas tarefas. Dos resultados obtidos, salienta-se uma realização não satisfatória dos estudantes na exploração do jogo, o que se manifestou em várias dificuldades dos estudantes, designadamente, ao não explicarem a origem dos valores que apresentaram, ao determinarem probabilidades incorretas e ao cometerem outros erros, como sejam erros de cálculo e de interpretação daquilo que era pedido. Assim, face aos resultados insatisfatórios do estudo, torna-se importante aprofundar a formação dos estudantes acerca da definição, interpretação e aplicação da noção de jogo aleatório. Para tal, a exploração de jogos aleatórios na sala de aula pode contribuir para a melhoria da realização dos estudantes, já que eles raramente são aí explorados.

PALAVRAS-CHAVE: Probabilidades; Jogos aleatórios; Realização; Estudantes; Ensino superior.

ABSTRACT: In this article, we study the achievement of polytechnic higher education students in exploring a random game, considering the following objectives: 1) evaluate students' performance in exploring the game, and 2) identify students' difficulties in exploring the game. The study included 49 students attending an engineering course's 2nd or 3rd year at a higher education institution in northern Portugal. The data resulted from students solving several tasks about random games in a brief questionnaire, with only one of these tasks being studied here. From the results obtained, it is worth noting that the students performed unsatisfactorily in exploring the game, which resulted in several student difficulties, namely by not explaining the origin of the values they presented, by determining incorrect probabilities, and by making other errors, such as are errors in calculation and interpretation of what was requested. Therefore, given the unsatisfactory results of the study, it is essential to deepen the training of students regarding the definition, understanding, and application of the notion of random game. To this end, exploring random games in the classroom can improve student achievement since they are rarely explored there.

KEYWORDS: Probability; Random games; Achievement; Students; Higher education.

RESUMEN: Este artículo estudia la realización de estudiantes de educación superior politécnica en la exploración de un juego aleatorio, teniendo en cuenta los siguientes objetivos: 1) evaluar el desempeño de los estudiantes en la exploración del juego; y 2) identificar las dificultades de los estudiantes en la exploración del juego. El estudio incluyó a 49 estudiantes que asistían al segundo o tercer año de una carrera de ingeniería en una institución de educación superior en el norte de Portugal. Los datos resultaron de que los estudiantes resolvieran varias tareas sobre juegos aleatorios en un breve cuestionario, y aquí solo se estudia una de estas tareas. De los resultados obtenidos se destaca la realización insatisfactoria de los estudiantes en la exploración del juego, lo que se manifestó en dificultades de varios estudiantes, a saber, al no explicar el origen de los valores que presentaban, al determinar probabilidades incorrectas y cometiendo otros errores, como son errores de cálculo e interpretación de lo solicitado. Por lo tanto, dados los resultados insatisfactorios del estudio, es importante profundizar en la formación de los estudiantes en cuanto a la definición, interpretación y aplicación de la noción de juego aleatorio. Para ello, explorar juegos aleatorios en el aula puede contribuir a mejorar el rendimiento de los estudiantes, ya que rara vez se exploran allí.

PALABRAS CLAVE: Probabilidad; Juegos aleatorios; Realización; Estudiantes; Enseñanza superior.

1. Introdução

Desde os primórdios da civilização que os jogos de sorte e azar estão presentes na atividade humana, desempenhando um papel social relevante ao nível da diversão, do lazer e do convívio. Com o decorrer do tempo, progressivamente, tais jogos vão adquirindo uma dimensão mais racional, ao ponto de darem origem à Teoria das Probabilidades no século XVII (Hacking, 1975).

Também em matemática, a temática dos jogos tem-se vindo a impor como estratégia de ensino e aprendizagem. No caso dos programas escolares atuais, é feita referência aos jogos em todos os anos escolares, do 1º ao 12º anos, com maior incidência nos programas escolares do 1º ao 4º anos (Ministério da Educação, 2021, 2023). Em particular, os jogos de sorte e azar são extensamente usados no ensino e aprendizagem de Probabilidades porque, sendo jogos simples, permitem às crianças aprofundarem as suas intuições e, assim, adquirirem noções probabilísticas (Batanero, 2013).

Neste estudo, estudantes do ensino superior politécnico exploram um jogo aleatório, concretamente determinando prémios implicados no jogo, à luz dos objetivos: 1) avaliar o desempenho dos estudantes na exploração do jogo e 2) identificar dificuldades dos estudantes na exploração do jogo. Na análise das resoluções dos estudantes, na exploração do jogo, tem-se em conta as respostas por eles dadas e as estratégias adotadas nas suas resoluções.

As ligações dos jogos aleatórios com noções probabilísticas e o potencial pedagógico gerado pelo seu contexto (Koparan, 2019) destacam a sua importância na aprendizagem de Probabilidades. Contudo, essa importância contrasta com dificuldades reveladas por estudantes do ensino superior em variados estudos sobre jogos aleatórios (e.g., Hourigan & Leavy, 2020; Koparan, 2019; Mohamed & Ortiz, 2012; Ortiz et al., 2012). Porque a exploração dos jogos aleatórios requer a aplicação de variadas noções probabilísticas, compreende-se que as dificuldades dos estudantes nos jogos também têm origem nas suas dificuldades em Probabilidades.

Uma vez apresentada a temática do estudo, os seus objetivos e justificada a sua importância, no próximo ponto desenvolve-se o enquadramento teórico do estudo e continua-se com um ponto dedicado à metodologia. No ponto seguinte apresentam-se os resultados obtidos e, por fim, sintetizam-se as principais conclusões do estudo e discutem-se as implicações didáticas dele decorrentes.

2. Enquadramento teórico

Nos jogos aleatórios destacam-se dois casos: os jogos de proporcionalidade direta e os jogos de proporcionalidade inversa. Nos jogos de proporcionalidade direta, o prémio de cada jogador é diretamente proporcional à sua probabilidade de ganhar o jogo, portanto, quanto maior for a probabilidade do jogador ganhar, maior (proporcionalmente) é o seu ganho. Num jogo com dois jogadores, represente-se por P o prémio total em jogo, p_1e p_2 a probabilidade de cada jogador ganhar o jogo e g_1 e g_2, respetivamente, o ganho ou prémio de cada um deles. Assim, tendo em conta a proporcionalidade direta, tem-se que: $g_1 = P \times p_1 \; e \; g_2 = P \times p_2$, donde se conclui que o ganho de cada jogador é dado pela sua esperança matemática. Portanto, trata-se de um jogo que beneficia o jogador com maior probabilidade de ganhar.

Nos jogos de proporcionalidade inversa, o prémio de cada jogador é inversamente proporcional à sua probabilidade de ganhar o jogo, portanto, quanto maior for a probabilidade do jogador ganhar, menor (proporcionalmente) é o seu ganho. Num jogo com dois jogadores, represente-se por p_1e p_2 a probabilidade de cada jogador ganhar o jogo e g_1 e g_2, respetivamente, o ganho ou prémio de cada um deles. Logo, a partir da definição de proporcionalidade inversa, verifica-se que: $K = g_1 \times p_1$ e $K = g_2 \times p_2$, sendo K a constante de proporcionalidade inversa. Daqui resulta a igualdade $g_1 \times p_1 = g_2 \times p_2$. Estes jogos são designados por jogos equitativos porque não beneficiam qualquer jogador e a igualdade anterior constitui um critério para verificar se o jogo é ou não equitativo.

Em particular, se as probabilidades de os jogadores ganharem o jogo são iguais, conclui-se, pela igualdade anterior, que os ganhos dos jogadores também são iguais, seja no caso da proporcionalidade direta ou inversa. Portanto, nesta situação, o jogo em questão é sempre equitativo. Na presente investigação explora-se um jogo de proporcionalidade direta em que ambos os jogadores têm diferentes probabilidades de vencer, tratando-se, por isso, de um jogo não equitativo.

Na continuação, reveem-se e discutem-se alguns estudos prévios sobre o desempenho de estudantes na realização de jogos aleatórios.

Green (1982), na sua tese de doutoramento, envolvendo alunos do ensino secundário e pré-secundário, com idades dos 11 aos 16 anos, aplicou um item relativo ao lançamento de um dado, em que se indagavam os alunos sobre o prémio que devia receber um jogador que ganhava o jogo quando saísse um 1, quando o outro jogador recebia 1 centavo quando saísse um 2, 3, 4, 5 ou 6, se o jogo fosse equitativo. Os resultados obtidos indicam que 58% dos alunos responderam corretamente, ao afirmarem que o jogador devia receber 5 centavos. Trata-se, portanto, de um desempenho satisfatório dos alunos, o qual aumentou, sistematicamente, com o avanço do ano escolar.

Já Fischbein e Gazit (1984) conduziram uma experiência de ensino sobre conteúdos elementares de Probabilidades com alunos dos 5º, 6º e 7º anos. Num dos itens dos questionários de avaliação dessa experiência perguntava-se aos alunos se a obtenção de um berlinde branco de uma caixa com 10 berlindes brancos e 20 pretos ou de uma caixa com 30 berlindes brancos e 60 pretos é um jogo equitativo. A probabilidade igual de obter um berlinde branco de qualquer das caixas foi afirmada por 49,6% dos alunos, verificando-se um claro aumento da percentagem de respostas corretas com o avanço do nível escolar. Contudo, muito menos alunos justificaram as suas respostas corretas.

Mais tarde, Guerrero, et al. (2016) realizaram um estudo com alunos dos 1º e 2º anos do curso de Bachillerato no qual foi usada uma tarefa formada por vários labirintos, antes usada por Green (1982), à qual foram acrescentados dois itens sobre a noção de esperança matemática. Num dos itens, a percentagem de respostas corretas foi de 43,3% no 1º ano e 57,6% no 2º ano, enquanto, no outro item, essa percentagem foi de 30% no 1º ano e 57,6% no 2º ano. Portanto, constata-se que os alunos do 2º ano, que tinham estudado Probabilidades no ano escolar anterior, tiveram um melhor desempenho do que os alunos do 1º ano. Destaca-se, ainda do estudo, uma elevada adesão dos alunos ao enviesamento de equiprobabilidade (Lecoutre & Durand, 1988), com 24,7% dos alunos do 1º ano e 20,2% dos do 2º ano, em qualquer dos itens. Neste tipo de erro, os alunos tendem a admitir que acontecimentos de natureza aleatório são por natureza equiprováveis e que não se podem fazer previsões sobre o resultado a obter. Considerando os melhores resultados obtidos pelos alunos do 2º ano, os autores concluíram que a experiência de ensino de Probabilidades em que tinham participado esses alunos foi eficaz, inferindo que na compreensão ou intuição da esperança matemática "os alunos parecem intuir o valor esperado da frequência com que se obtém um acontecimento na repetição de uma experiência" (Guerrero et al., 2016, p. 34).

Num estudo posterior, Guerrero, et al. (2017) investigaram alunos, também dos 1º e 2º anos do curso de Bachillerato, na resolução de duas questões, cada uma com dois itens: na primeira, tratando da experiência aleatória de lançamento de duas moedas e dois jogadores com prémios iguais, questionava-se a preferência por algum dos jogadores e o prémio que devia ganhar um dos jogadores para que o jogo fosse equitativo; e, na segunda, tratando da experiência aleatória de lançamento de um dado e dois jogadores com prémios diferentes, perguntava-se se algum dos jogadores tinha vantagem no jogo e quanto devia ganhar cada jogador numa série de jogos. Em termos de percentagens de respostas corretas, em cada um dos quatro itens, os alunos do 1º ano obtiveram 66,7%, 8,7%, 6,7% e 30%, e os alunos do 2º ano obtiveram 77,3%, 18,2%, 25,8% e 45,5%, respetivamente. Estes resultados levaram os autores a concluir que os alunos foram capazes de reconhecer o jogador que tinha vantagem, mas tiveram muitas dificuldades nos restantes itens, o que mostra que o conceito de esperança matemática não é tão intuitivo como se admitia (Heitele, 1975). Particularmente, os piores resultados obtidos no segundo item mostram a grande dificuldade de os alunos explorarem a proporcionalidade inversa para estabelecerem a equidade do jogo. Em geral, confirmam-se os resultados obtidos no estudo de Guerrero, et al. (2016), designadamente, a adesão ao enviesamento de equiprobabilidade (Lecoutre & Durand, 1988) e o melhor desempenho dos alunos do 2º ano, os quais já tinham estudado Probabilidades no ano anterior.

Ortiz, et al. (2012) realizaram uma investigação em que, além de outras questões, aplicaram também os dois itens antes usados nos estudos de Fischbein e Gazit (1984) e Green (1982), mas a futuros professores dos primeiros anos. Dos futuros professores, no item de Fischbein e Gazit (1984), 70,6% concluíram que o jogo era equitativo com base em argumentos adequados (raciocínios de correspondência e multiplicativo[1]), respondendo, portanto, corretamente; no item de Green (1982), 77,2% concluíram que o jogo não era

[1] Na estratégia de correspondência estabelece-se um critério de proporcionalidade numa das frações e aplica-se esse critério à outra fração; na estratégia de multiplicativa comparam-se as duas frações obtidas pela regra de Laplace.

equitativo, respondendo, assim, corretamente, dos quais 69,5% argumentaram com a comparação das probabilidades de os adversários ganharem. Logo, verifica-se que o desempenho dos futuros professores foi muito melhor do que o dos alunos que participaram nos estudos anteriores, o que mostra que esses futuros professores tinham um bom raciocínio probabilístico e uma conceção adequada de jogo equitativo.

Num outro estudo, Mohamed e Ortiz (2012) questionaram futuros professores do ensino primário, para além de outras questões, sobre um problema em que se pedia para avaliarem se um jogo era ou não equitativo. Nesse jogo, lançam-se dois dados e determina-se a diferença entre o maior e o menor (ou igual) dos valores obtidos, estabelecendo-se que um dos jogadores ganha 1 ficha quando se obtém a diferença 0, 1 ou 2 e o outro jogador ganha também 1 ficha quando se obtém a diferença 3, 4 ou 5. Dos futuros professores, um pouco menos de metade (41,7%) respondeu corretamente, 37,8% respondeu incorretamente e 20,5% nem sequer respondeu. Assim, a maioria dos futuros professores, ao responder incorretamente ou não responder, revelou um escasso conhecimento do conceito de jogo equitativo. Comparando com o estudo de Ortiz, et al. (2012), em que também participaram futuros professores, neste estudo os futuros professores tiveram um desempenho muito inferior. Essa discrepância, muito provavelmente, deve-se ao facto de neste estudo estar implicada, uma experiência composta (lançamento de dois dados), enquanto, no estudo de Ortiz, et al. (2012), estão implicadas duas experiências simples (extração de um berlinde de uma caixa e lançamento de um dado), tal como aconteceu num estudo de Fernandes, et al. (2016), em que futuros professores dos primeiros anos sentiram muitas dificuldades numa tarefa envolvendo uma experiência composta. Nesse estudo, envolvendo a experiência de extração de duas bolas de um saco com bolas brancas e pretas, os principais erros deveram-se à dificuldade de relacionar probabilidades em experiências simples com probabilidades em experiências compostas, não considerar a não reposição na experiência ou não atender à ordem para identificar os resultados da experiência composta.

3. Metodologia

A investigação aqui relatada foca-se na exploração, por estudantes do ensino superior, de um jogo aleatório, não equitativo, tendo por objetivos: 1) avaliar o desempenho dos estudantes na exploração do jogo; e 2) identificar dificuldades dos estudantes nessa exploração. Para tal, conduziu-se uma investigação, predominantemente, quantitativa e de natureza descritiva. Neste tipo de investigação estuda-se uma realidade preexistente, neste caso, o conhecimento sobre jogos aleatórios. Trata-se, portanto, de uma indagação *ex post facto*, recorrendo a métodos rigorosos e sem exercer qualquer tipo de controlo (Gall et al., 2003).

Participaram no estudo 49 estudantes de um Instituto Politécnico do norte de Portugal, que frequentavam cursos de Licenciatura em Engenharia nessa instituição. À exceção de um, todos os restantes estudantes eram do género masculino, tinham idades compreendidas entre os 19 e os 45 anos, com média de 22,3 anos, e encontravam-se a frequentar o segundo (84%) ou o terceiro anos (16%) dos respetivos cursos.

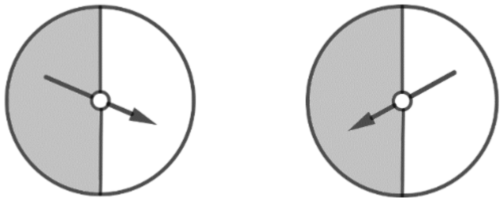
Os dados usados no estudo resultaram das respostas dadas pelos estudantes a várias tarefas sobre jogos aleatórios, incluídas num questionário, das quais tratamos aqui apenas uma (ver Figura 1). No questionário era dito que no jogo aleatório em questão o prémio de cada jogador é diretamente proporcional à sua probabilidade de ganhar o jogo, ou seja, que o prémio é dado pela esperança matemática relativa ao respetivo jogador. Portanto, trata-se de um jogo não equitativo, uma vez que beneficia o jogador com maior probabilidade de ganhar o jogo.

O questionário era anónimo e a participação dos estudantes foi voluntária, tendo sido informados de que poderiam abandonar o estudo a qualquer momento. Aquando da aplicação do questionário, os estudantes já tinham frequentado a unidade curricular de Estatística, em que se incluem tópicos elementares de Probabilidades. Foi-lhes explicado o propósito do estudo, em que consistia o questionário e o que se esperava da sua participação no estudo.

Figura 1

Enunciado da tarefa proposta aos estudantes.

Na figura seguinte estão representadas duas roletas, cada uma dividida em duas partes iguais, uma colorida a cinzento e outra a branco.



Girando as duas roletas e registando a cor assinalada pelo ponteiro (branca ou cinzenta), estabeleceu-se o seguinte jogo:

• A Ana ganha o jogo quando se obtém cor branca em ambas as roletas;

• O Rui ganha o jogo quando se obtém pelo menos uma vez cor cinzenta numa das roletas.

a) Há 12 rebuçados para distribuir pelos dois jogadores, a Ana e o Rui. Quantos rebuçados deve receber a Ana? E o Rui? Porquê?

b) Se a Ana receber 8 rebuçados, quantos rebuçados devem receber, em conjunto, a Ana e o Rui?

Fonte: Elaboração dos autores

A tarefa tinha dois itens, sendo que no item a) trata-se de determinar o prémio que deve receber cada um dos jogadores, conhecido o prémio total em jogo e no item b) pretende-se determinar o prémio a receber pelos dois jogadores em conjunto, ou seja, o prémio total em jogo, conhecido o prémio de um dos jogadores.

Por fim, na análise de dados começou-se por estudar as respostas dos estudantes, classificando-as em corretas, parcialmente corretas e incorretas, e registou-se numa tabela a distribuição de frequência dessas respostas, incluindo-se também a não resposta. Adicionalmente, para avaliar o desempenho global em cada item, codificaram-se as respostas corretas com o valor 1, as respostas parcialmente corretas com o valor 0,5 e as respostas incorretas ou ausência de resposta com o valor 0 (zero). De seguida, analisaram-se os processos de resolução dos estudantes tendo em vista aprofundar a compreensão dos tipos de respostas e as suas dificuldades em cada um dos itens. Adicionalmente, tendo em vista proporcionar uma melhor compreensão da análise realizada, apresentam-se alguns exemplos de resoluções dos estudantes, identificados por um código alfanumérico, nomeadamente pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhes foi atribuído (de 1 a 49).

4. Apresentação de Resultados

A tarefa tinha dois itens e consistia de um jogo em que o prémio de cada jogador era diretamente proporcional à sua probabilidade de ganhar o jogo, ou seja, era dado pela respetiva esperança matemática. Em termos de resolução, no item a), representados por B os setores brancos e por C os setores cinzentos da roleta, tem-se que a probabilidade de cada jogador ganhar é: $P(\text{Ana}) = P(BB) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$ e $P(\text{Rui}) = P(BC) + P(CB) + P(CC) = 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 = 3/4$. Portanto, sendo 12 o número total de rebuçados em jogo, $1/4$ e $3/4$ as probabilidades de Ana e Rui ganharem o jogo, respetivamente, e por aplicação da noção de esperança matemática, tem-se que Ana deve receber $12 \times 1/4 = 3$ rebuçados e Rui deve receber $12 \times 3/4 = 9$ rebuçados.

No item b), multiplicando a probabilidade da Ana ganhar pelo número total de rebuçados em jogo, obtém-se o número de rebuçados que ela deve receber. Assim, sendo $\boldsymbol{t}$ o número total de rebuçados em jogo, tem-se: $1/4 \times t = 8 \Leftrightarrow t = 32$. Logo, em conjunto, a Ana e o Rui devem receber 32 rebuçados.

Na Tabela 1 registam-se as frequências (em %) dos tipos de resposta (correta, parcialmente correta e incorreta) e não resposta em cada um dos itens da tarefa.

Tabela 1

Frequência absoluta (em %) dos tipos de resposta e não resposta nos itens a) e b) da tarefa.

Tipo de resposta	Itens	
	a)	b)
Correta	12 (24)	21 (43)
Parcialmente correta	18 (37)	—
Incorreta	19 (39)	23 (47)
Não resposta	—	5 (10)

Fonte: Elaboração dos autores

Como se constata, nos dois itens da tarefa, observam-se percentagens de respostas *corretas* consideravelmente distintas, sendo essa percentagem no item b) quase o dobro da do item a). Já as repostas *parcialmente corretas* aconteceram apenas no item a), com uma razoável expressão, e as respostas *incorretas* foram um pouco mais frequentes no item b) do que no item a). Por último, a *não resposta* apresenta uma reduzida expressão, com apenas um total de 5 estudantes a não responder ao item b).

Apesar da menor percentagem de respostas *corretas* no item a), a considerável percentagem de respostas *parcialmente corretas* que se verificaram nesse item e que não existem no item b), levam a concluir que o desempenho dos estudantes em cada um dos itens não foi muito díspar.

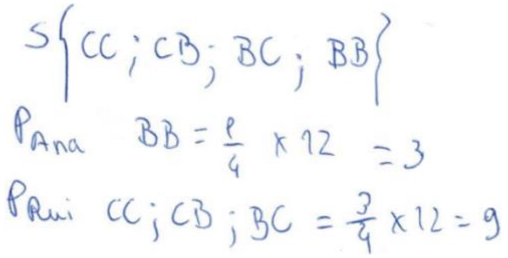
De seguida, tendo em vista aprofundar a compreensão das respostas dos estudantes e identificar as suas dificuldades, iremos analisar as estratégias adotadas pelos estudantes nos diferentes tipos de respostas em cada um dos itens.

4.1. Item a)

No caso das respostas *corretas*, os estudantes (10) adotaram a seguinte estratégia: determinar as probabilidades de cada jogador ganhar e multiplicá-las pelo número total de rebuçados em jogo. Na Figura 2 apresenta-se um exemplo de estratégia deste tipo.

Figura 2

Resolução do item a) pelo estudante E8.



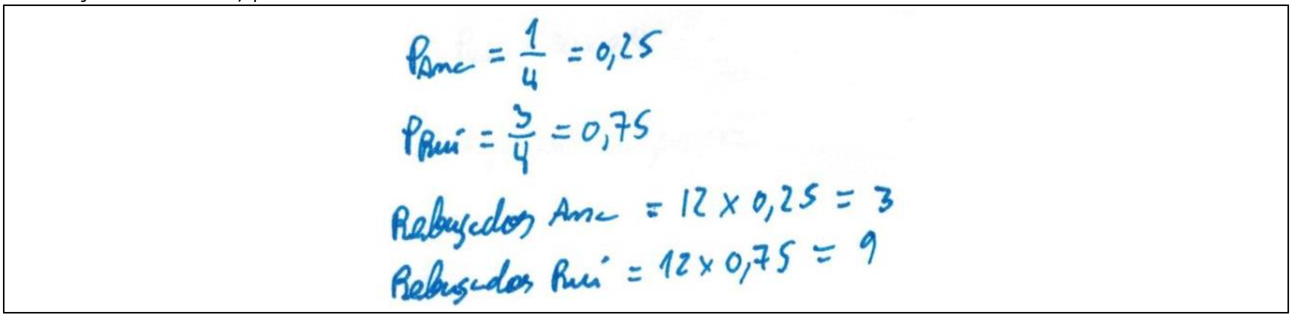
Fonte: Elaboração do estudante

Embora usando uma notação nem sempre adequada, o estudante E8 começa por descrever o espaço de resultados e, de seguida, determina os valores *corretos* das probabilidades, que multiplica pelo número total de rebuçados em jogo, obtendo, assim, o número de rebuçados que Ana e Rui devem receber, isto é, 3 e 9 rebuçados respetivamente.

Nas respostas *parcialmente corretas*, que se verificaram apenas no item a), a estratégia consistiu em apresentar o valor correto das probabilidades sem qualquer explicação do processo de obtenção desses valores (13) ou apresentar o número de rebuçados sem qualquer explicação do processo de obtenção desses valores (6). Ou seja, nos processos de determinação das probabilidades corretas e dos números de rebuçados corretos, o estudante explicou um deles e omitiu o outro. De entre o considerável número de estudantes que usaram esta estratégia, a maioria omitiu a explicação do processo de obtenção dos valores das probabilidades. Na Figura 3 apresenta-se um exemplo de resolução em que não se explica o processo de obtenção das probabilidades de cada jogador ganhar.

Figura 3

Resolução do item a) pelo estudante E3.



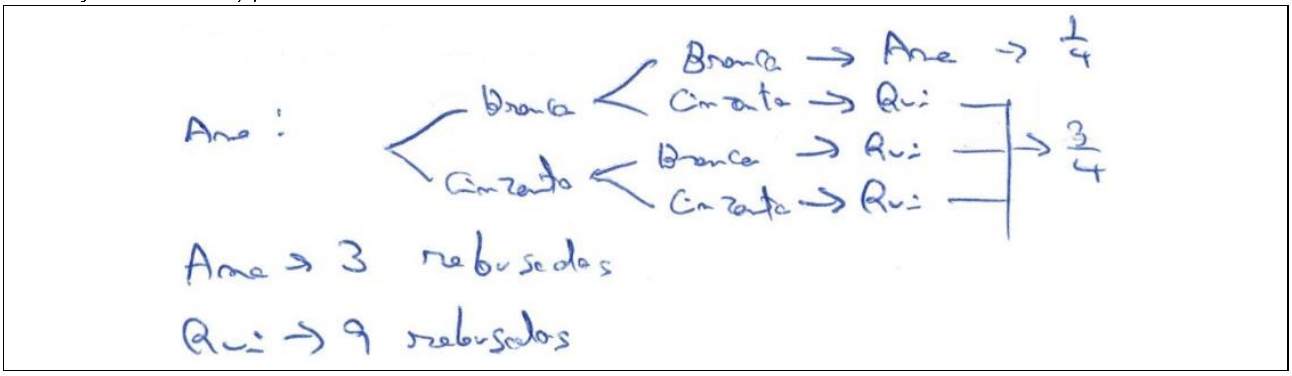
Fonte: Elaboração do estudante

O estudante E3 apresenta os valores corretos das probabilidades de ambos jogadores ganharem, mas não indica como obteve esses valores. De seguida, multiplica o número total de rebuçados em jogo pelas respetivas probabilidades, obtendo, desse modo, o número de rebuçados a receber por Ana e Rui.

Já no caso em que não se explica o processo de obtenção do número de rebuçados a receber por cada jogador, apresenta-se na Figura 4 um exemplo de resolução.

Figura 4

Resolução do item a) pelo estudante E12.



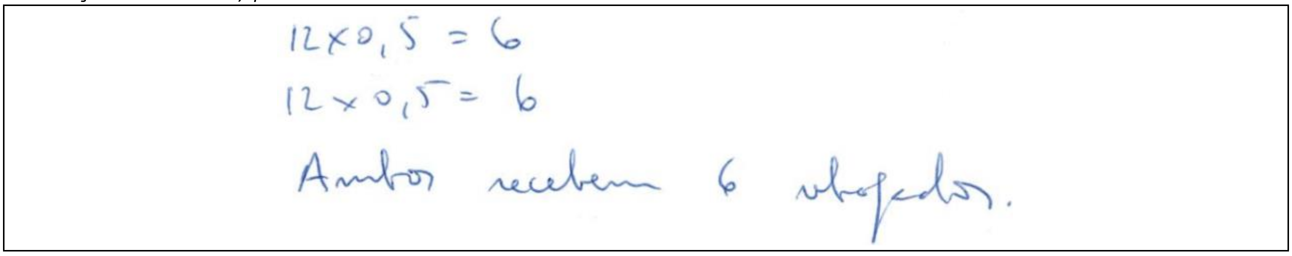
Fonte: Elaboração do estudante

Recorrendo a um diagrama em árvore, o estudante E12 determina corretamente os valores das probabilidades de cada jogador ganhar o jogo; contudo, não explica como obteve o número de rebuçados a atribuir a cada jogador. Porém, tratando-se de um cálculo simples, essa omissão pode dever-se ao facto deste estudante ter efetuado mentalmente o cálculo.

Por fim, nas respostas *incorretas*, alguns estudantes (7) não apresentaram qualquer explicação de como foram obtidos, tanto os valores corretos das probabilidades como os números corretos de rebuçados ou apresentaram pelo menos um valor incorreto de pelo menos uma das probabilidades (13). Neste último caso, quase todos os estudantes (12) indicaram valores incorretos para pelo menos uma das probabilidades, enquanto o outro estudante determinou incorretamente o número de rebuçados. Acrescenta-se, ainda, que destes estudantes alguns (5) limitaram-se a apresentar o valor incorreto de pelo menos uma das probabilidades sem explicar como obtiveram esse valor e outros (4) consideraram ser iguais as probabilidades de ambos os jogadores ou os números de rebuçados a receber por eles, aparentando terem aderido ao enviesamento de equiprobabilidade. Na Figura 5 apresenta-se um exemplo de estratégia que conduziu a uma resposta incorreta.

Figura 5

Resolução do item a) pelo estudante E14.



Fonte: Elaboração do estudante

Erradamente, o estudante E14 arbitrou, sem dar qualquer explicação, que ambos os jogadores tinham igual probabilidade de ganhar o jogo, aderindo ao enviesamento de equiprobabilidade, o que se repercutiu no igual número de rebuçados a receber por qualquer um deles.

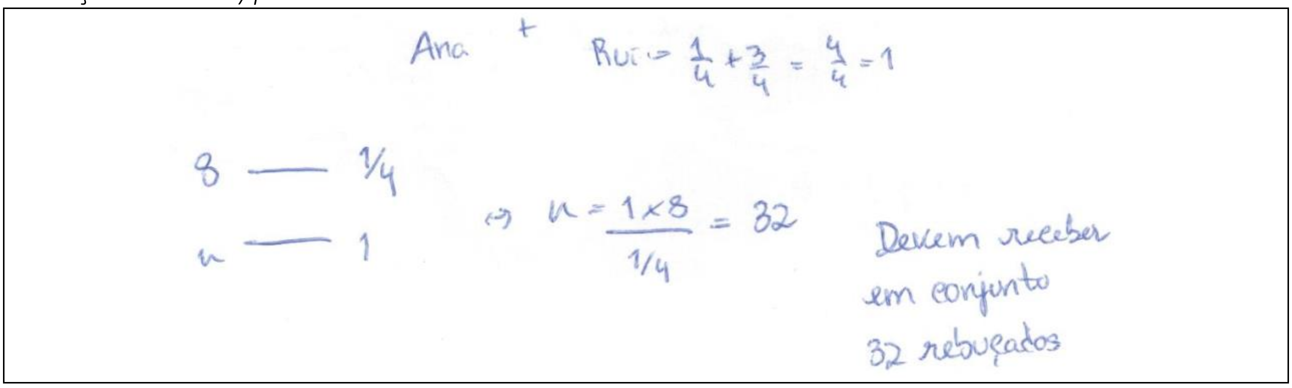
4.2. Item b)

Para obterem a resposta correta, os estudantes adotaram as seguintes estratégias: i) determinar o número total de rebuçados correspondente aos 8 rebuçados recebidos pela Ana, recorrendo a uma regra de três simples (6); ii) aplicar a noção de esperança matemática (13); e iii) começar por determinar o número de rebuçados a receber pelo Rui e, de seguida, adicionar esse número ao número de rebuçados da Ana, obtendo-se, assim, o número total de rebuçados dos dois jogadores (2). Constata-se, portanto, que a adoção da estratégia ii) foi maioritária entre os estudantes.

Na estratégia i), todos os estudantes que a adotaram recorreram a uma regra de três simples, em que os estudantes fizeram corresponder os 8 rebuçados da Ana à sua probabilidade de ganhar, que é $1/4$, ou seja, $8 — 1/4$, e o total x à probabilidade 1, ou seja, $x — 1$. Na Figura 6 regista-se a resolução de um estudante que recorreu a esta estratégia.

Figura 6

Resolução do item b) pelo estudante E5.



Fonte: Elaboração do estudante

Pela Figura 6, verifica-se que o estudante E5 estabeleceu a regra de três simples, antes referida, obtendo, imediatamente, o número de rebuçados a receber por ambos os jogadores, que é 32 rebuçados. Atente-se que o estudante, na sua resolução, justificou a origem do valor 1 na regra de três simples, certificando-se que a soma das probabilidades de os jogadores ganharem é igual a 1, o que equivale a dizer que os acontecimentos em questão são complementares.

Na estratégia ii) os estudantes aplicaram a noção de esperança matemática ao caso de Ana. Assim, o produto do número total de rebuçados em jogo (x) (a receber por Ana e Rui em conjunto) pela probabilidade de Ana ganhar ($1/4$) deve ser igual ao número de rebuçados a receber por Ana (8), dando, portanto, origem à equação $x \times 1/4 = 8$. Na Figura 7 apresenta-se a resolução de um estudante que usou esta estratégia.

Figura 7

Resolução do item b) pelo estudante E32.

$\frac{1}{4} \times x = 8 \Leftrightarrow x = 32$

Rui $\rightarrow \frac{3}{4} \times 32 = 24$

No total 32 rebuçados

Fonte: Elaboração do estudante

O estudante E32 estabelece a equação que relaciona a probabilidade de ganhar o jogo e o número de rebuçados referentes a Ana, o que permite determinar diretamente o número total de rebuçados em jogo. Apesar de não ser pedido, o estudante também determinou o número de rebuçados que Rui devia ganhar, que é 24 rebuçados.

Já na estratégia iii) os dois estudantes usaram as probabilidades de cada jogador vencer o jogo, calculadas no item a), estabeleceram uma regra de três simples e, assim, determinaram o número de rebuçados que a Rui devia receber. Finalmente, adicionaram este número ao número de rebuçados da Ana, que era dado, para obter o número total de rebuçados dos dois jogadores. Na Figura 8 apresenta-se a resolução de um estudante que recorreu a esta estratégia.

Figura 8

Resolução do item b) pelo estudante E43.

$\frac{1}{4}$ —— 8

$x = 24$

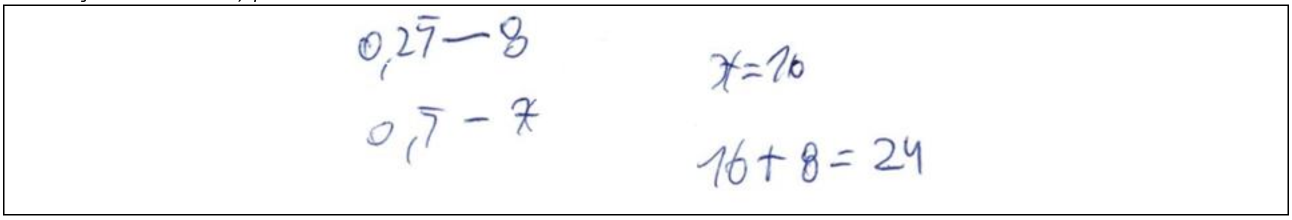
$\frac{3}{4}$ —— x Total é 32

Fonte: Elaboração do estudante

O estudante E43 estabelece a regra de três simples a partir das probabilidades calculadas em a) e do número de rebuçados da Ana, o que lhe permitiu determinar o número de rebuçados do Rui. Talvez mentalmente, o estudante tivesse adicionado o número de rebuçados obtido ao número de rebuçados de Ana para obter o número total de rebuçados.

Finalmente, nas respostas *incorretas*, alguns estudantes (7) apresentaram o número total de rebuçados correto sem fornecerem qualquer explicação do processo de como chegaram a esse valor e mais estudantes (16) apresentaram resoluções *incorretas*. Nestas últimas resoluções, alguns estudantes (2) usaram o total de rebuçados que estavam em jogo no item a), um estudante considerou que ambos os jogadores deviam receber igual número de rebuçados, outros (5) determinaram apenas o número de rebuçados do Rui e alguns (4) determinaram o número total de rebuçados, mas cometeram erros nas probabilidades. Finalmente, os restantes estudantes (4) apresentaram valores *incorretos* sem apresentarem qualquer explicação sobre como obtiveram esses valores. Na Figura 9 regista-se um exemplo de estratégia que conduziu a uma resposta errada.

Figura 9
Resolução do item b) pelo estudante E23.



Fonte: Elaboração do estudante

O estudante E23 recorreu às probabilidades que arbitrou em a), sem dar qualquer explicação de como as obteve, e ao número de rebuçados de Ana para estabelecer a regra de três simples. Como o valor de uma das probabilidades estava incorreto, precisamente o valor 0,5, obteve um número incorreto de rebuçados para o Rui e, em consequência, para o total de rebuçados. Além disso, o estudante não teve em conta que a soma das duas probabilidades, relativas aos dois jogadores, devia dar 1.

5. Conclusão

Nesta investigação estudou-se o desempenho de estudantes do ensino superior politécnico na exploração de um jogo aleatório, não equitativo, mais concretamente, determinando prémios relativos ao jogo.

Embora a percentagem de respostas *corretas* no item b) seja de quase o dobro do que acontece no item a), há, no entanto, uma percentagem considerável de respostas parcialmente corretas no item a). Estas respostas *parcialmente corretas* devem-se ao facto de os estudantes não explicarem como obtiveram as probabilidades ou o prémio indicado, com maior incidência nas probabilidades. Já no item b) essa omissão não se verificou, até porque as probabilidades foram calculadas apenas no item a).

Nos diferentes tipos de respostas, codificando as respostas *corretas* com o valor 1, as respostas *parcialmente corretas* com o valor 0,5 e as respostas *incorretas* ou *ausência de resposta* com o valor 0, conclui-se que, globalmente, o desempenho médio dos estudantes foi idêntico e insatisfatório em ambos os itens, sendo aproximadamente de 43% numa escala de 0% a 100%. Portanto, em ambos os itens o desempenho foi inferior a 50%.

Já em termos de respostas *incorretas* e *não resposta* observou-se uma percentagem de 39% e 57%, respetivamente, nos itens a) e b), o que traduz as grandes dificuldades sentidas pelos estudantes em ambos os itens. Pela análise das estratégias adotadas pelos estudantes verifica-se que as suas dificuldades resultaram, sobretudo, da apresentação de valores corretos de probabilidades e prémios sem explicação de como os obtiveram, da determinação de valores incorretos de probabilidades, da adesão ao enviesamento de equiprobabilidade (Lecoutre & Durant, 1988) e de serem cometidos outros erros, como sejam erros de cálculo ou incorreta interpretação do que era pedido.

Nas resoluções observou-se, com alguma frequência, que os estudantes recorreram à regra de três simples para obter a sua resposta, sobretudo no item b). Ora, perante jogos aleatórios de proporcionalidade direta, a regra de três simples assume-se como uma ferramenta adequada (de entre outras, como a noção de esperança matemática) para enfrentar questões relativas a esses jogos, sendo também uma ferramenta da preferência dos estudantes para lidar com proporções e proporcionalidade direta (Fernandes et al., 2019).

Considerando os estudos prévios em que os participantes têm idade e formação próximas dos do presente estudo, verifica-se um desempenho semelhante nos estudos de Guerrero, et al. (2016, 2017) e Mohamed e Ortiz (2012). Já no estudo de Ortiz, et al. (2012) observou-se um melhor desempenho, o que se explica pelo facto de, nesse estudo, estar envolvida uma experiência aleatória simples, em que é mais simples o cálculo de probabilidades do que na experiência aleatória composta envolvida no presente estudo (Fernandes et al., 2016).

Perante as dificuldades explícitas, manifestadas pelos estudantes, no presente estudo, importa aprofundar a sua formação em Probabilidades e, mais especificamente, na temática dos jogos aleatórios. Os jogos aleatórios têm um elevado potencial educacional uma vez que mantêm relações com diversas temáticas, como sejam as Probabilidades, a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa (esta última não foi tratada neste estudo). No caso das Probabilidades destacam-se as noções de experiência aleatória, acontecimento, cálculo de probabilidades e esperança matemática. Todavia, apesar do potencial educacional dos jogos aleatórios, eles não são frequentemente abordados nas aulas, o que também explica as dificuldades reveladas pelos estudantes. Portanto, a exploração dos jogos aleatórios na sala de aula permite privilegiar as conexões entre diferentes conteúdos e, certamente, contribuirá para reduzir as dificuldades sentidas pelos estudantes, assumindo-se, por conseguinte, como uma estratégia promissora em temos de aprendizagem.

Contribuição

J.A. FERNANDES: Conceptualização; Investigação; Metodologia; Análise de dados; Escrita - Revisão & Edição; Supervisão. G. GONÇALVES: Conceptualização; Investigação; Metodologia; Análise de dados; Validação. P.M. BARROS: Conceptualização; Investigação; Escrita – Esboço original; Análise formal.

Referências

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, M. V. Sousa, & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-21). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., Barros, P. M., & Gonçalves, G. (2019). Resolver problemas envolvendo razões e proporções por futuros professores dos primeiros anos. In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, E. M. Silva, G. Santos, R. Patrício, & L. Castanheira (Eds.), *IV Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): livro de atas* (pp. 394-405). Instituto Politécnico de Bragança.

Fernandes, J. A., Gea, M. M., & Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 178-187). SEIEM.

Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction* (7ª ed.). A & B Publications.

Green., D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years* [Tese de doutoramento, Loughborough University of Technology]. https://hdl.handle.net/2134/7409

Guerrero, H., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2016). Conocimientos sobre esperanza matemática en alumnos de bachillerato. In F. España (Ed.), *Actas del XVI Congreso de Educación y Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 26-35). Sociedad Andaluza de Educación Matemática – THALES.

Guerrero, H., Ortiz, J. J., & Contreras, J. M. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *11*, 107-125.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge University Press.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Hourigan, M., & Leavy, A. M. (2020). Pre-service teachers' understanding of probabilistic fairness: Analysis of decisions around task design. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(7), 997-1019.

Koparan, T. (2019). Teaching game and simulation based probability. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *6*(2), 235-258.

Lecoutre, M.-P., & Durant, J-L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 357-368.

Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico.* Direção-Geral da Educação.

Ministério da Educação (2023). *Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário*. Direção-Geral da Educação.

Mohamed, N., & Ortiz, J. J. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, 80, 103-117.

Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 63-91.