

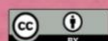
As representações matemáticas num problema algébrico na formação inicial de professores do Ensino Básico

Mathematical representations in an algebraic problem in the
initial training of primary school teachers

Las representaciones matemáticas en un problema
algebraico en la formación inicial de profesores de
Educación Primaria

ADRIANA FERREIRA

ISSN 1645-4774 | e-ISSN 2183-038X
<https://www.eduser.ipb.pt>



As representações matemáticas num problema algébrico na formação inicial de professores do Ensino Básico

Mathematical representations in an algebraic problem in the initial training of primary school teachers

Las representaciones matemáticas en un problema algebraico en la formación inicial de profesores de Educación Primaria

ADRIANA FERREIRA¹

¹ Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto; Porto; Portugal; <https://orcid.org/0000-0003-2457-110X>; adriana@ese.ipp.pt

Submetido: 22/julho/2026

Aceite: 30/julho/2026

Publicado: 31/julho/2026

RESUMO: As representações matemáticas ocupam cada vez mais um lugar central na educação matemática e na planificação de tarefas com sentido que impliquem pensar e fazer, mais do que memorizar definições e procedimentos. Os normativos que regulam a atividade matemática, assim como os principais documentos de referência, apontam o conhecimento e uso de representações múltiplas como um dos objetivos centrais da aprendizagem matemática, imprescindível para alcançar a proficiência nesta disciplina. Neste sentido, o presente estudo tem como principal objetivo a identificação de diferentes tipos de representações matemáticas utilizados por estudantes do Ensino Superior, futuros professores do Ensino Básico, na resolução de um problema algébrico. A investigação enquadra-se numa abordagem qualitativa e interpretativa, desenvolvida com um total de sessenta e oito estudantes a frequentar a Licenciatura em Educação Básica, que resolveram um problema algébrico e posteriormente selecionaram, de entre duas alternativas de resolução para o mesmo problema, aquela que se assemelha mais à sua forma de pensar. Como instrumentos de recolha de dados, recorreu-se à recolha documental das produções dos estudantes, à observação, às notas de campo e ao registo áudio. Os resultados demonstram que predomina o uso de representações simbólicas do tipo aritmético, embora com uma taxa de sucesso abaixo do esperado. As representações simbólicas matemáticas algébricas são as menos utilizadas e conduzem a resoluções incompletas. Os participantes revelam abertura para acolher outras formas de representar diferentes das que os próprios produzem, desde que haja uma explicação e consequente compreensão das mesmas.

PALAVRAS-CHAVE: Formação inicial de professores; Ensino Básico; Problema algébrico; Representações matemáticas.

ABSTRACT: Mathematical representations are increasingly taking a central role in mathematics education and in the planning of meaningful tasks that involve thinking and doing, rather than merely memorizing definitions and procedures. The guidelines that regulate mathematical activity, as well as key reference documents, highlight the knowledge and use of multiple representations as

one of the core goals of mathematics learning, essential for achieving proficiency in the subject. In this context, the present study aims to identify the different types of mathematical representations used by higher education students, future primary school teachers, when solving an algebraic problem. This research follows a qualitative and interpretative approach, involving a total of sixty-eight students enrolled in a degree in Basic Education. The participants solved an algebraic problem and were subsequently asked to choose, from two alternative solutions to the same problem, the one that best aligned with their own way of thinking. Data collection instruments included students' written work, observation, field notes, and audio recordings. The results show a predominant use of symbolic representations of an arithmetic nature, although with a lower-than-expected success rate. Algebraic symbolic representations were the least used and often led to incomplete solutions. Nevertheless, participants showed openness to other forms of representation different from their own, provided that explanations were offered and understanding was achieved.

KEYWORDS: Initial teacher education; Primary education; Algebraic problem; Mathematical representations.

RESUMEN: Las representaciones matemáticas ocupan cada vez más un lugar central en la educación matemática y en la planificación de tareas significativas que impliquen pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos. Las normativas que regulan la actividad matemática, así como los principales documentos de referencia, señalan el conocimiento y uso de múltiples representaciones como uno de los objetivos fundamentales del aprendizaje matemático, imprescindible para alcanzar la competencia en esta disciplina. En este sentido, el presente estudio tiene como objetivo principal identificar los diferentes tipos de representaciones matemáticas utilizados por estudiantes de Educación Superior, futuros docentes de Educación Primaria, en la resolución de un problema algebraico. La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo e interpretativo, desarrollada con un total de sesenta y ocho estudiantes del Grado en Educación Primaria, quienes resolvieron un problema algebraico y posteriormente seleccionaron, entre dos alternativas de resolución para el mismo problema, aquella que más se asemejaba a su forma de pensar. Como instrumentos de recogida de datos se utilizaron los documentos producidos por los estudiantes, la observación, las notas de campo y el registro de audio. Los resultados muestran un uso predominante de representaciones simbólicas de tipo aritmético, aunque con una tasa de éxito inferior a la esperada. Las representaciones simbólicas algebraicas son las menos utilizadas y conducen a resoluciones incompletas. Los participantes se muestran receptivos a otras formas de representación diferentes a las que ellos mismos producen, siempre que se les ofrezca una explicación que permita su comprensión.

PALABRAS CLAVE: Formación inicial del profesorado; Educación Primaria; Problema algebraico; Representaciones matemáticas.

1. Introdução

A construção do conhecimento matemático, que pressupõe a sua aplicação em diversas situações quotidianas, cimeta as suas bases em processos de raciocínio que devem ser desenvolvidos ao longo do percurso escolar de forma cada vez mais complexa. O professor de matemática tem grande responsabilidade na capacitação dos alunos para pensar, devendo investir na perceção e compreensão dos processos e práticas inerentes à disciplina, nomeadamente, no conhecimento de diferentes formas de representar (NCTM, 2007; Brodie, 2010).

As representações matemáticas têm assumidamente um papel central no raciocínio matemático e na resolução de problemas, o que é reconhecido pelo National Council of Teachers of Mathematics (2007), que as considera um dos “process standards”, bem como pelos documentos curriculares de relevância para a aprendizagem da disciplina. As Aprendizagens Essenciais da Matemática para o Ensino Básico, atualmente em vigor, redigidas em articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, apontam o desenvolvimento da “capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática” (Canavarro, 2021, p. 3) como um dos oito objetivos que os alunos devem alcançar para aprender matemática.

O contacto, exploração e consequente domínio de diferentes formas de representar em matemática deve ser garantido e potenciado pelo professor, considerado orientador no processo de aprendizagem. Para tal, é essencial que também ele conheça e se aproprie das diferentes representações, conhecendo potencialidades de cada uma delas e sendo capaz de as utilizar, adaptar e explicar. Neste contexto, o presente artigo propõe-se a: (a) analisar as diferentes representações matemáticas utilizadas por estudantes do Ensino Superior a frequentar a Licenciatura em Educação Básica, futuros professores, na resolução de uma tarefa algébrica; (b) analisar as explicações apresentadas decorrentes do entendimento do problema e dos registos realizados para encontrar uma solução. Esta análise é parte de um trabalho mais amplo que permitirá refletir de forma mais sustentada sobre as necessidades de formação dos futuros professores do Ensino Básico.

2. As representações em Matemática

A matemática é uma área do saber que recorre a uma diversidade imensa de processos de aquisição de conhecimento com funções cognitivas distintas, mas com um objetivo comum: alcançar a compreensão matemática. São vários os estudos que referem as dificuldades que os estudantes sentem neste domínio, muitos deles com foco na resolução de problemas. O uso da noção de representação matemática pode ser utilizado para compreender e caracterizar os processos de resolução de problemas e aferir sobre as dificuldades evidenciadas (Duval, 2006).

Na investigação em educação matemática as representações têm sido um tema cada vez mais debatido, principalmente desde que foram reconhecidas como um processo matemático pelo NCTM, importando, assim, definir este conceito. De acordo com o NCTM (2007), as representações são processos e produtos, modos de aquisição de um conceito ou de uma relação matemática, que pressupõe simultaneamente o processo de captar uma ideia numa determinada forma e a própria forma resultante, tornando-se, por isso, ferramentas privilegiadas para organizar ideias em matemática, registá-las e, ainda, comunicá-las. A maioria dos autores que explora este tema confirma esta definição, reforçando ainda que as representações não são produtos estáticos, mas sim um processo dinâmico, utilizado para articular, ligar, esclarecer e explicar raciocínios, pelo que se tornam essenciais na construção do conhecimento matemático ou de relações em matemática (Woleck, 2001). De acordo com Goldin, “a representation is a configuration that can represent something else in some manner” (2002, p. 208). A este propósito importa ainda salientar que “os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas” (NCTM, 2007, p. 240). Tripathi (2008) concorda que as representações facilitam a interpretação, comunicação e discussão de ideias, acrescentando que são construções mentais ou visíveis que permitem estruturar um conceito matemático e relacioná-lo com outros conceitos.

De facto, as representações permitem, muitas vezes, a autocompreensão de um enunciado matemático, funcionando como verdadeiros tradutores de uma linguagem corrente para uma linguagem matemática (ainda que possa ser a um nível informal). Todavia, é muito complexa a relação entre uma determinada representação e o seu significado (Goldin, 2008), já que “uma representação pode representar vários objetos distintos e objetos diferentes podem ter uma mesma representação” (Velez, 2020, p.10). Neste contexto, importa notar que as representações matemáticas não podem ser analisadas e compreendidas de forma isolada (Velez, 2020; Pinto & Canavarro, 2012), mas antes “no quadro de um determinado sistema de representação com regras, significados e normas globalmente aceites” (Velez, 2020, p.10). Goldin (2008) refere que os sistemas de representações possuem uma estrutura flexível, na medida em que estão em permanente alteração, embora essa estrutura seja também complexa e bem organizada por incluir diferentes representações e relações entre elas. A este propósito, Velez (2020) explica:

Na prática, o desenvolvimento do sistema de representação de cada pessoa é um processo moroso, em que é necessário comparar e estabelecer conexões entre uma nova representação e as representações que já conhecemos, com o intuito de compreender o seu significado e assim conseguir utilizá-la adequadamente em situações futuras (p. 10).

De facto, são vários os estudos que evidenciam a importância das representações matemáticas, destacando importantes definições e refletindo sobre as dificuldades que os estudantes habitualmente revelam no seu uso. Goldin (2002) distingue representações internas de externas, referindo que as primeiras estão diretamente relacionadas com o raciocínio do aluno, pelo que são mentais ou não observáveis; já as representações externas são observáveis e podem ser analisadas e compreendidas, já que têm de ser comunicadas de forma verbal ou através de desenhos, esquemas, gráficos, entre outros. Deste modo, as representações externas, também designadas por representações semióticas, são essenciais para (a) entender o modo como o aluno interpretou o problema e (b) definir a intervenção do professor.

Brunner (1999) distingue três tipos de representações externas: as ativas, as icónicas e as simbólicas. As primeiras estão diretamente relacionadas com a ação e, portanto, implicam a manipulação de materiais que podem ser estruturados ou não. As representações icónicas caracterizam-se pela “organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo” (Brunner, 1999, p.28), pelo que incluem a produção de desenhos, esquemas, diagramas ou outros símbolos não convencionais. Por fim, as representações simbólicas constituem um modo mais complexo de representar, com recurso a palavras ou linguagem simbólica, a símbolos matemáticos, a números ou a fórmulas. Para o mesmo autor, são “um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições” (p.66).

Pinto e Canavarro (2012), utilizando a terminologia de Brunner, identificam ainda subcategorias nas representações icónicas: o desenho, os símbolos não convencionais e os diagramas. O desenho, segundo Cavalcanti (2001), citado por Pinto e Canavarro (2012),

pode ser usado de três maneiras diferentes na resolução de problemas: a) para representar aspetos da situação apresentada no texto sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas; b) para representar a resolução completa do problema utilizando apenas o desenho e c) o aluno mistura desenho e símbolos matemáticos (p. 5).

Os símbolos não convencionais, são símbolos não matemáticos, como traços, pintinhas ou outros, que apesar de representarem elementos da realidade, não têm a forma desses, acabando por ser mais abstratos do que o desenho. Por sua vez, os diagramas, segundo Diezmann e English (2001), citados por Pinto e Canavarro (2012), apresentam os dados numa forma espacial, podem revelar-se um modo de representação que auxilia e favorece o raciocínio matemático, e podem ser

diagramas em rede, matrizes, diagramas de hierarquias e diagramas parte-todo.

Por seu turno, Presten e Garner (2003) identificam cinco formas de representar ideias: verbais (linguagem natural e relação com o quotidiano), pictóricas (imagens ou desenhos), numéricas/tabelares (organização da informação em tabelas, formulação de hipóteses, teste), gráficas (representação gráfica, variáveis e relações entre variáveis) e algébricas (símbolos matemáticos e fórmulas, generalizações).

Já Clement (2004), citando Lesh, Post e Behr (1987), bem como Tripathi (2008), apresentam modelos de categorização muito próximos, que se resumem na tabela abaixo:

Tabela 1

Tipos de representações matemáticas.

Clement (2004)	Tripathi (2008)
Imagens	Semi-concretas (pictóricas)
Materiais manipuláveis	Concretas (manipuláveis)
Linguagem oral	Linguagem
Símbolos escritos	Simbolismo (notação)
Situações relevantes	Contextuais (situações da vida real)

Fonte: Elaboração própria

Por sua vez, Velez (2020) considera cinco tipos de representações:

(i) ativas (que implicam manipulação de objetos, gestos ou movimentos); (ii) pictóricas (desenhos pormenorizados muito próximos da realidade); (iii) icónicas (símbolos não matemáticos e esquemas que implicam alguma abstração); (iv) simbólicas verbais (palavras na forma verbal e escrita); e (v) simbólicas matemáticas (notação matemática) (p. 14).

A exploração das representações requer um trabalho cuidadoso, já que é desejável que se estabeleçam conexões entre as diferentes tipologias de representação, para que elas não sejam “entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras. Na verdade, podem ser usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que estão presentes ao longo de toda a vida” (Boavida et al., 2008, p.71).

As representações matemáticas podem ser muito mais do que a mobilização de um sistema de sinais, principalmente se as entendermos como um veículo facilitador da comunicação matemática (Canavarro, 2021), que ajuda “os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros” (NCTM, 2007, p. 240). Nesta vertente de interação social, é essencial o quadro genérico referido por Velez (2020), uma vez que é ele “que torna possível a comunicação matemática, com a utilização universal de representações comumente aceites e generalizadas” (Velez, 2020, p.10).

Quando se fala de representações matemáticas podem, então, identificar-se diferentes tipologias, embora se possa também analisar o nível de formalidade das produções realizadas pelos estudantes. Assim, Webb et al. (2008) apresentam uma espécie de modelo de aprendizagem e apropriação das representações, associado a uma ideia de progressão, não só no que diz respeito às representações, mas também ao conhecimento matemático. Para estes autores, em primeira instância utilizam-se representações informais, que contêm conceitos concretos representados em contextos familiares. Posteriormente, começam a utilizar-se representações pré-formais, que já são mais abstratas e, conseqüentemente, com maior complexidade. Por fim, surge a capacidade de produzir representações formais, nas quais já se utilizam notações matemáticas formais, com recurso a símbolos matemáticos, números, operações, fórmulas. Naturalmente, não há uma linha que defina claramente cada um destes níveis, pelo que se pode oscilar entre eles, o que conduz ao

aparecimento de um nível de formalidade híbrido, que pode ser designado por semi-formal.

Neste contexto, Pinto e Canavarro (2012), ao estudar o papel das representações na resolução de problemas com estudantes do Ensino Básico e Secundário evidenciam a utilização de diferentes modos de representação com funções distintas na compreensão de um problema e na sua desconstrução, coexistindo, muitas vezes, representações formais e informais. Deste modo, uma só representação pode conter traços característicos de dois ou dos três níveis de formalidade referidos anteriormente. Webb et al. (2008) referem que perante um novo contexto ou situação problema que possa trazer insegurança ou incertezas aos alunos, estes tendem a regredir no nível de formalidade, voltando a usar representações informais e/ ou pré-formais que já tinham deixado de utilizar.

3. Metodologia

Em termos metodológicos, o presente estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa e interpretativa, uma vez que se trata de “investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo” (Coutinho, 2011, p.26). Para além disso, os dados foram recolhidos num ambiente natural de aprendizagem, há uma preocupação descritiva e valoriza-se acima de tudo o processo e não apenas o resultado, que constituem, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), algumas das principais características de um estudo qualitativo.

Reiterando autores como Quivy e Campenhoudt (2003), que referem a importância de identificar uma pergunta de partida a propósito das fases do processo investigativo, neste trabalho procurou-se dar resposta à seguinte questão: “Que tipo de representações são privilegiadas pelos estudantes da formação inicial de professores para resolver um problema algébrico?”.

Os participantes nesta investigação são sessenta e oito estudantes do Ensino Superior, futuros professores, a frequentar a Unidade Curricular (UC) Números e Estruturas do segundo ano do plano de estudos da Licenciatura em Educação Básica, na Escola Superior de Educação de um Instituto Politécnico de Portugal. No primeiro ano deste ciclo de estudos, estes estudantes frequentaram duas UC's no âmbito da matemática, nenhuma delas com foco na álgebra nem na resolução de problemas. Relativamente ao Ensino Secundário, quase metade é proveniente do curso de Línguas e Humanidades ou similar, 23 estudantes frequentaram o curso de Ciências e Tecnologias e apenas 12 tiraram cursos profissionais sem enfoque na matemática.

Os participantes resolveram um problema algébrico numa das primeiras aulas da UC com a duração de cerca de duas horas, dividida em duas partes: (i) concretização da tarefa, de um modo individual, tendo sido reforçada a necessidade do registo do percurso utilizado para determinar a resposta e a importância de não rasurar nenhuma resolução, mesmo que se abandone ou que seja considerada incorreta; (ii) discussão coletiva para reflexão sobre as diferentes representações. Cerca de três meses depois, numa das últimas aulas da UC, foram apresentadas aos estudantes duas resoluções para o mesmo problema com recurso a tipos de representações matemáticas diferentes. Foi-lhes sugerido que escolhessem aquela que se assemelhava mais com a sua forma de pensar o problema e que fizessem um texto breve reflexivo sobre a outra alternativa, tentando explicar a resolução apresentada e o motivo pelo qual não se identificavam com ela.

Como instrumentos de recolha de dados, recorreu-se à recolha documental das produções dos estudantes, à observação, às notas de campo recolhidas durante a realização das tarefas e ao registo áudio do momento da discussão final coletiva. Procedeu-se à análise de conteúdo dos registos áudio que foi triangulada com as grelhas de observação e com as notas de campo, para uma análise mais clara e cuidada das produções dos estudantes.

A investigação foi conduzida tendo em conta os princípios de boas práticas de investigação,

dimensão ética que se concretizou com o contributo do Código de Ética da AERA (AERA, 2011), que estabelece os princípios fundamentais para a realização de estudos no âmbito educativo. Destacamos a participação voluntária dos participantes, que assinaram o consentimento informado após lhes ser dada a conhecer a investigação de forma clara e transparente, bem como a anonimização dos dados pessoais recolhidos para seu tratamento e apresentação.

Partindo da análise da literatura acima mencionada, foi elaborada a tabela 2, na qual se apresentam as categorias através das quais se realizou a análise das representações dos estudantes no decorrer do estudo.

Tabela 2

Categorias de análise de dados em função das tipologias de representações matemáticas.

Representação		Nível de formalidade
Pictórica	Desenhos com grande proximidade à realidade	Informal
Icónica	Símbolos não convencionais, mais abstratos	
Simbólica verbal		Semi-formal
Simbólica matemática	aritmética	Formal
	algébrica	
Mista		Semi-formal

Fonte: Elaboração própria

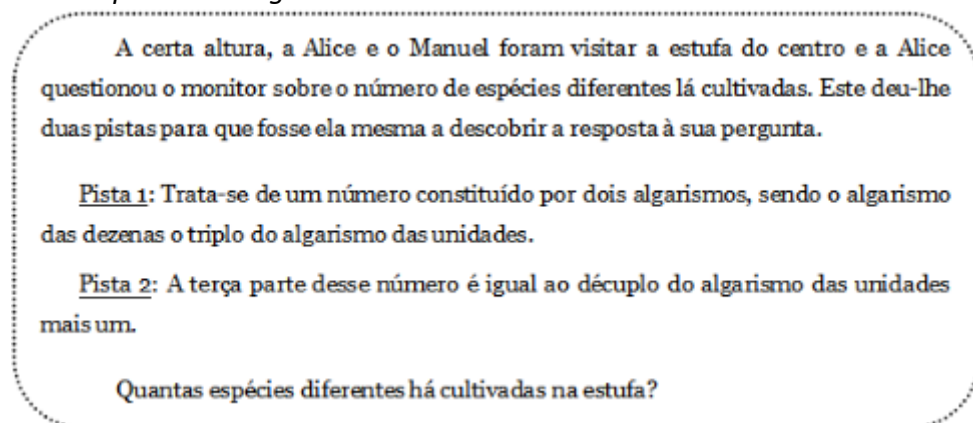
Conforme já foi mencionado, este artigo decorre de uma investigação mais ampla que incluiu um conjunto alargado de tarefas matemáticas. Uma vez que esta redação se concentra na análise de um problema algébrico, as representações utilizadas pelos estudantes e analisadas são do tipo simbólico matemático, alternando entre representações aritméticas e algébricas, ou combinando as duas, numa representação mista.

4. Apresentação dos resultados

Na figura 1 encontra-se o enunciado da tarefa apresentada:

Figura 1

Enunciado do problema algébrico.



Fonte: Elaboração própria

A tabela 3, abaixo apresentada, mostra a distribuição dos estudantes pelos tipos de representação utilizados.

Tabela 3

Tipos de representações utilizados e respetiva taxa de sucesso.

Representação		Resposta correta	Resposta incorreta	Sem resposta final	Total
Simbólica matemática	aritmética	19	6	16	41
	algébrica	0	0	6	6
Mista		4	1	1	6
Em branco		-----	-----	15	15
Total		23	7	38	68

Fonte: Elaboração própria

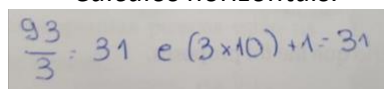
Foram 15, isto é, cerca de 22%, os estudantes que deixaram a questão em branco. Para além disso, incluem-se nas representações matemáticas aritméticas um conjunto de nove estudantes que registaram apenas notas breves no enunciado, a saber: apontaram “ $\times 3$ ” como representação matemática da expressão “o triplo” e “ $\times 10$ ” da expressão “igual ao décuplo”; e representaram dois tracinhos para traduzir a formação de um numeral constituído por dois algarismos.

Ainda nas representações do tipo simbólico matemático aritmético distinguem-se várias situações. Sete estudantes conseguiram interpretar apenas a primeira pista sugerida, pois registaram pelo menos um dos três numerais constituídos por dois algarismos, cujo das dezenas é o triplo do das unidades. Apenas dois deles registaram os três numerais: 31, 62 e 93. Nenhum conseguiu decifrar a segunda pista e, por conseguinte, dar uma resposta.

O procedimento mais utilizado para resolver o problema foi identificar os três numerais sugeridos na pista um e, de seguida, fazer a verificação da pista dois para cada um desses casos. Foram vinte os estudantes que o fizeram, recorrendo a representações formais para realizar a sua verificação. Uma parte deles recorreu apenas a cálculos horizontais, realizando uma operação de cada vez, e outros utilizaram como cálculo auxiliar o algoritmo da divisão. Nenhum destes estudantes construiu uma igualdade como sugere a pista, por exemplo $93 \div 3 = 10 \times 3 + 1$, optando por fazê-lo separadamente, como se pode verificar na figura 2.

Figura 2

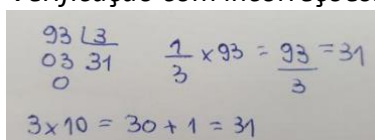
Cálculos horizontais.



$$\frac{93}{3} = 31 \text{ e } (3 \times 10) + 1 = 31$$

Figura 3

Verificação com incorreções.



$$\begin{array}{r} 93 \overline{) 3} \\ 03 \\ \hline 0 \end{array} \quad \frac{1}{3} \times 93 = \frac{93}{3} = 31$$

$$3 \times 10 = 30 + 1 = 31$$

A figura 3 apresenta ainda o cálculo horizontal com uma não igualdade, erro apresentado por dois estudantes, que adicionam uma unidade ao resultado da operação anterior, ignorando que estão a representar uma igualdade. Aqui, erradamente, o igual não é entendido como um símbolo que expressa uma relação de equivalência, mas antes como um operador que desencadeia um cálculo. Na discussão final estes estudantes não só assumem o erro como afirmam “faço sempre isso, sei que está mal, mas faço sempre”. Note-se que se trata de um erro de representação formal e não propriamente de raciocínio, não tendo qualquer impacto na procura pela solução.

Há ainda cinco estudantes que não apresentaram as três hipóteses de resposta à primeira pista, mas apenas a opção “93”, que é a única que cumpre o imposto na segunda pista. Estes fizeram a verificação da segunda pista apenas para este valor.

Dos estudantes que utilizaram apenas representações aritméticas registaram-se seis que apresentaram uma resposta incorreta, sendo importante referir que metade deu como resposta “Há 31 espécies diferentes cultivadas na estufa”, confundindo o numeral que se procurava com o resultado que obtiveram nos cálculos de verificação ($93 \div 3 = 31 \wedge 10 \times 3 + 1 = 31$). Estes estudantes aperceberam-se do engano ao apresentar a sua resolução ao grupo, corrigindo de imediato.

As representações simbólicas matemáticas do tipo algébrico surgiram também em algumas resoluções. Os seis estudantes que tentaram resolver a questão utilizando unicamente este tipo de representações formais com recurso à utilização de incógnitas não conseguiram obter uma resposta. Dois destes começaram por definir três incógnitas, nomeadamente x para o número de espécies, u para o algarismo das unidades e d para o algarismo das dezenas. A partir daqui, escreveram u em função de d e vice-versa, interpretando a pista um, e construíram corretamente uma equação que traduzia a informação contida na pista dois. No entanto, esta equação, ainda que simplificada, acabava por ficar sempre com duas incógnitas, não lhes permitindo determinar o resultado (figura 4). Um outro estudante também definiu três incógnitas, mas em vez de construir uma equação, construiu um sistema de equações, que apesar de não apresentar nenhuma incorreção matemática na tradução de cada uma das pistas para linguagem matemática, não lhe permite determinar uma solução, por ter três incógnitas num sistema de apenas duas equações (figura 5). Este estudante não avança com a resolução do sistema.

Figura 4

Resolução incompleta através de uma equação com duas incógnitas.

Handwritten mathematical work showing the derivation of an equation with two variables:

$$d = 3 \times u \quad (\Rightarrow) \quad u = \frac{d}{3}$$

$$\frac{1}{3}x = 10u + 1 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{x}{3} = 10\left(\frac{d}{3}\right) + 1$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{x}{3} = \frac{10d}{3} + 1 \quad (\Rightarrow)$$

Figura 5

Resolução incompleta através de um sistema de duas equações com três incógnitas.

Handwritten mathematical work showing a system of two equations with three variables and a legend:

$x =$ algarismo dezenas
 $y =$ " unidades
 $z =$ número de espécies

$z \neq$

$$\begin{cases} x = 3y \\ \frac{z}{3} = (10y + 1) \quad (\Rightarrow) \end{cases}$$

Os outros três estudantes que optaram unicamente por representações algébricas, cometeram erros na tradução das pistas para a linguagem matemática. Um deles fez um erro de inversão ao considerar que o algarismo das dezenas era x e o das unidades era $3x$, o que não se coaduna com a informação “sendo o algarismo das dezenas o triplo do algarismo das unidades”. Os outros dois consideraram a igualdade $\underline{3x} \quad \underline{x} = 3x + x$, em vez de $\underline{3x} \quad \underline{x} = 10 \times 3x + x$, ignorando o valor posicional do sistema de numeração indo-árabe, bem como a sua base decimal.

Os estudantes restantes recorreram a representações mistas para resolver a questão. Todos eles combinaram representações simbólicas matemáticas do tipo algébrico com representações matemáticas do tipo aritmético, por esta ordem. Quatro conseguiram determinar a resposta certa, um respondeu incorretamente (cometendo o mesmo erro já enunciado anteriormente de considerar que a resposta era “31”) e um não conseguiu apresentar resposta, deixando a resolução inacabada por falta de tempo para conclusão. Todos estes estudantes recorreram à formalização do enunciado, utilizando incógnitas para representar os algarismos das dezenas e das unidades. Estas foram utilizadas para determinar os três numerais que respeitavam a pista um (figura 6). Depois, verificaram a pista dois recorrendo a cálculos horizontais, para cada uma das hipóteses.

Figura 6

Tradução da pista um com recurso à formalização.

y	x = 3y	Result
Se y = 1	x = 3	(31)
y = 2	x = 6	(62)
y = 3	x = 9	(93)
y = 4	x = 12	(124)

No momento de partilha foi debatida a possibilidade de formalizar o problema utilizando apenas uma incógnita. Depois de se esclarecer a relação entre o algarismo das dezenas e o das unidades apresentada na pista um, a investigadora sugeriu que pensassem sobre o valor posicional do sistema de numeração indo-árabe. Nesse momento, várias vozes se fizeram ouvir, conforme o excerto abaixo:

- Estudante A: Professora, não dava para resolver só com uma incógnita?
- Prof./inv.: Podemos refletir sobre isso... Vamos começar pela pista um e pela relação que já identificaram.
- Estudante A: Posso ir ao quadro?
- Prof./inv.: Claro!
- Estudante A: [Enquanto escrevia] Vou usar u , de unidades, e $3u$ para as dezenas.
- Prof./ inv.: Está ótimo! Agora pensemos todos sobre o nosso sistema de numeração, que sabemos que é posicional decimal. Isso permite-me escrever esse numeral na forma de polinómio, sem usar esses “tracinhos” que representam as unidades e as dezenas [cf. figura 7].
- Estudante B: Como assim?
- Prof./ inv.: Vamos pensar, por exemplo, no numeral vinte e sete, nos algarismos que o constituem e no valor de cada um deles para representar essa quantidade.
- [Silêncio]
- Estudante A: Ok, já sei! Fica este [aponta para $3u$] vezes dez, mais este [aponta para u].
- Vários: Hum?
- Estudante A: Este [$3u$] está nas dezenas, daí vezes 10.
- Estudante C: Vinte e sete não é dois mais sete.
- Estudante D: É vinte mais sete.

Estudante B: Ahh!! Vinte é dois vezes o dez, como noventa é nove vezes o dez.

Estudante A: Sim, porque está nas dezenas. Então fica isto $[3u \times 10 + u]$, que posso simplificar para $31u$. Agora já sei, se o número é $31u$, o algarismo das unidades é u e o das dezenas é $3u$, já consigo escrever a segunda pista usando só esta incógnita.

Este episódio argumentativo surgiu da questão de um estudante acerca da possibilidade de resolver a tarefa através da construção de uma equação com uma só incógnita e foi acompanhado do registo no quadro, presente na figura 7.

Figura 7

Registo realizado no momento de discussão final.

$$\begin{aligned} &\underline{3u} \quad \underline{u} \\ &3u \times 10 + u = 30u + u = 31u \\ &\frac{31u}{3} = 10u + 1 \Rightarrow 31u = 30u + 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 31u - 30u = 3 \Rightarrow u = 3 \\ &\quad \quad \quad \hookrightarrow d = 3 \times 3 = 9 \\ &93 \end{aligned}$$

O estudante A percebe que a dificuldade estará em escrever o número de espécies diferentes cultivadas na estufa em função de u , o seu algarismo das unidades. Torna-se necessária a intervenção da professora/ investigadora, que recorda duas das principais características do sistema de numeração indo-árabe, o seu valor posicional e a base decimal, que permitem estabelecer esta relação que o estudante procura. Foi ainda preciso referir um exemplo concreto, para que se refletisse sobre o que se pretendia. Depois de compreender que $27 = 20 + 7 = 2 \times 10 + 7$, o estudante A fez a generalização que se pretendia para um numeral constituído por algarismos desconhecidos. Depois da descoberta, explicou que o algarismo das dezenas é multiplicado por dez e, de seguida, adiciona-se ao resultado obtido o algarismo das unidades. Os restantes estudantes, em conjunto, uns participando no momento de comunicação, outros fazendo registos nos seus cadernos, compreenderam a utilização do teorema fundamental dos sistemas de numeração posicionais decimais. Apesar desta compreensão revelada, a maioria foi afirmando ser incapaz de “pensar desta maneira”.

O recurso ao registo realizado no quadro, os momentos em que se aponta para o mesmo e os rascunhos que alguns estudantes iam realizando durante a situação argumentativa atribuem-lhe um carácter diagramático. No entanto, este serviu de suporte ao discurso organizado que os vários estudantes iam exteriorizando, tornando este momento também narrativo.

Relativamente ao segundo momento de recolha de dados, isto é, à questão apresentada com dois possíveis percursos de resolução, encontram-se, na figura 8, as alternativas apresentadas.

Figura 8

Sugestões de resolução para o problema algébrico.

(A)	(B)
Número: $3x \ x$ $(3x \times 10 + x) : 3 = 10x + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (30x + x) : 3 = 10x + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 30x + x = (10x + 1) \times 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 30x + x = 30x + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 3$ Assim, $3x = 3 \times 3 = 9$ R: Há 93 espécies diferentes na estufa.	Sendo o algarismo das dezenas o triplo do algarismo das unidades, temos: • 31 • 62 • 93 Para poder determinar a terça parte, terá de ser um número divisível por 3, logo terá de ser o 93. <u>Confirmação:</u> $93 : 3 = 31$ $3 \times 10 + 1 = 31$ R: Há 93 espécies diferentes na estufa.

A alternativa assinalada com a letra (A) contém uma representação simbólica matemática de carácter algébrico e apresenta um elevado grau de formalidade. Consiste na construção de uma equação de primeiro grau através da informação veiculada nas duas pistas. A resolução da equação permite determinar o algarismo das unidades, pelo que é necessário um último passo para descobrir ainda o algarismo das dezenas e depois identificar o resultado. A resolução apresentada em (B) consiste na criação de hipóteses tendo em conta a informação presente na pista um. A partir daí é necessário fazer a verificação dessas hipóteses através da aplicação da pista dois. A confirmação surge apenas para a terceira hipótese apresentada, uma vez que as duas anteriores se excluem por não serem divisíveis por três. Trata-se de uma resolução que contém representações do tipo simbólico matemático aritmético.

A tabela 4 contém as escolhas dos estudantes participantes.

Tabela 4

Tipos de representações selecionadas para solucionar o problema.

Tipo de representação	Total
(A) Simbólica matemática algébrica	9
(B) Simbólica matemática aritmética	57
Nenhuma das opções	2
Total	68

Fonte: Elaboração própria

Contaram-se nove estudantes que optaram pela representação simbólica matemática algébrica, cinquenta e sete que escolheram as representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético e dois que afirmaram ser incapazes de escolher uma das alternativas pelo grau de dificuldade de ambas, apontando que não compreendiam nenhum dos processos nem os consideravam intuitivos.

5. Discussão dos resultados

De um modo geral, relativamente ao primeiro momento de recolha de dados, importa referir que a questão do problema condicionou os tipos de representação apresentados, pela dependência algébrica do enunciado. Só se recolheram representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético ou do tipo algébrico, ou representações mistas que combinavam os dois tipos. A taxa de sucesso foi muito baixa: apenas cerca de 34% dos estudantes conseguiram determinar a resposta certa. Estes resultados também se explicam pelo elevado número de estudantes que não resolveu

a questão, deixando em branco ou apenas com pequenas notas, sem qualquer tipo de tentativa de resolução. Apesar de praticamente todos eles terem participado, no final, na discussão de grande grupo, revelaram incapacidade para dar continuidade à sua resolução de forma individual.

As representações mais comuns foram as simbólicas matemáticas aritméticas, sendo que no conjunto de estudantes que por elas optaram a taxa de sucesso não alcançou os 50%. Ficou, na verdade, muito próxima da percentagem de estudantes que, tendo optado pelo mesmo tipo de representação, não conseguiram concluir a resolução, não apresentando resposta. Por outro lado, nenhum dos estudantes que optou pelas representações simbólicas algébricas conseguiu determinar uma resposta. Conclui-se que muitos estudantes revelam dificuldades e insegurança em contextos algébricos, o que não lhes permite ter sucesso nas representações deste tipo.

Apesar das limitações, é evidente o interesse pela aprendizagem de muitos estudantes, o que se confirma com os episódios argumentativos que ocorreram, através dos quais os estudantes estabeleceram importantes relações entre os conhecimentos que possuíam e as informações presentes no enunciado da questão para a conseguirem resolver. Em conjunto, encontraram um percurso de resolução que compreenderam, apesar de nem todos se mostrarem capazes de o pôr em prática sozinhos.

Considera-se uma questão pertinente, que poderia gerar diversos tipos de representação, quer produzidos por diferentes estudantes, quer por um só estudante, uma vez que teria de respeitar duas condições (as duas pistas do enunciado), podendo cumprir uma delas utilizando um tipo de representação e a outra com outro tipo. Contudo, face às dificuldades de um número significativo de estudantes, não se conseguiu obter esta diversidade. Importa ainda mencionar que, tendo em conta o tipo de questão, se esperavam essencialmente representações simbólicas matemáticas. É evidente que estes estudantes sentem mais conforto e segurança recorrendo às do tipo aritmético ao invés das do tipo algébrico, o que se pode concluir pela sua utilização predominante, pela maior taxa de sucesso e pelo discurso dos próprios estudantes que assumem, muitas vezes, incapacidade de pensar em contextos algébricos que exigem abstração e recurso a incógnitas.

No geral, este baixo desempenho dos estudantes na resolução de tarefas simples que poderiam eles próprios apresentar aos seus alunos já no papel de professores vai ao encontro das conclusões de vários estudos que revelam que os futuros professores apresentam lacunas no campo do conhecimento matemático (Vieira et al., 2022). Autores como Tatto (2018) explicam que estas dificuldades são mais acentuadas em futuros professores que lecionarão nos primeiros anos de escolaridade, ou seja, no Ensino Básico, como é o caso dos participantes nesta investigação.

Paralelamente, conclui-se que os estudantes conhecem tipos de representações diferentes, mas nem todos se sentem confortáveis com o seu uso, sendo importante lembrar que assumem estranheza perante alguns tipos de representação. Esta questão pode ser preocupante na medida em que estes estudantes podem vir a sentir dificuldades em antecipar estratégias de resolução dos seus alunos e em compreender e aferir sobre a validade de representações apresentadas que difiram das que pensaram ou foram capazes de produzir, o que já é reiterado por Martins et al. (2023). Tudo isto, parece ser revelador da importância de incluir e até priorizar nos programas de formação inicial de professores atividades que auxiliem na construção bem como na compreensão de diferentes tipos de representações matemáticas na resolução de tarefas.

Um aspeto amplamente consensual nos diferentes estudos sobre o conhecimento matemático na formação inicial de professores com o qual concordamos é que as dificuldades que os futuros professores evidenciam não seriam necessariamente resolvidas com a criação de mais disciplinas na área da matemática (Viera et al., 2022). O que parece ser essencial é criar oportunidades nas unidades curriculares já existentes para que os estudantes possam resolver problemas práticos passíveis de serem aplicados por eles próprios no futuro enquanto professores, experimentando

diferentes formas de representação e diversos processos de resolução e procurando explicá-los aos pares, num momento que privilegia a comunicação matemática e a argumentação com enorme potencial para o desenvolvimento de diferentes formas de raciocinar em matemática.

No que concerne ao segundo momento de recolha de dados, os estudantes que assumem estar confortáveis com a matemática, com a álgebra e com a utilização de incógnitas foram os que optaram pela primeira alternativa de resposta apresentada, a que contém representações do tipo algébrico. Estes consideram a construção da equação o processo que exige mais concentração e cuidado na leitura do enunciado, mas garantem que depois de a construir tudo é “muito mais fácil”. Para além disso, apontam esta resolução como “a mais formal” e aquela que recorre a “um raciocínio e um pensamento mais estruturado”. Estes estudantes também apontam as desvantagens de uma resolução com recurso à tentativa-erro, lembrando que pode tornar-se um “processo demorado, principalmente quando não dá certo à primeira, nem à segunda, nem à terceira...”. Há um destes estudantes que, embora considere a resolução (A) a “mais adequada para este problema”, acaba por referir que a resolução (B) está “bem estruturada” e que “quase nem é tentativa-erro, porque pensa-se em três hipóteses, mas não se faz as contas para as três”. Este estudante continua explicando que “o que sabemos das pistas dá para eliminar os outros dois números”, pelo que se trata de uma resolução “mais simples, mas certa”.

Já os estudantes que optaram pela resolução aritmética têm grandes dificuldades em apontar benefícios à representação algébrica. Apenas três deles referem a maior adequabilidade de uma resolução deste último tipo para situações problema que envolvam maiores quantidades e cinco consideraram-na mais formal, o que se regista como uma vantagem deste tipo de representação.

Por outro lado, muitos destes estudantes revelam dificuldades no domínio de representações com este nível de abstração e formalidade, como é evidenciado pelos seus comentários. Note-se que três estudantes assumem não compreender esta resolução algébrica e ainda mais três referem não saber “resolver problemas com incógnitas”; outros três referem apenas preferir “resolver sem a incógnita”; há ainda mais quatro que apontam desconforto com a resolução de equações, sendo também de salientar dois estudantes que afirmam “não gosto de resolver assim”. Algumas destas justificações acabam por ser mais explícitas e revelam os receios destes estudantes. Na verdade, alguns são capazes de reconhecer dificuldade no momento de construção da equação, afirmando que exige “muita concentração” e maior domínio do “conhecimento matemático”. Há dois estudantes que assumem que nesta questão em concreto há “muitos conceitos envolvidos, como dezenas e unidades, o triplo, a terça parte e o décuplo”, o que dificulta o primeiro passo. Também há um estudante que aponta a questão “dos parêntesis mal colocados” ou de “trocar um dos sinais”, o que compromete depois toda a resolução. Há ainda os que afirmam compreender a equação construída ao analisá-la na resolução, embora tenham assumido incapacidade para a construir sozinhos. Outros estudantes referem que a dificuldade “até nem é em fazer a equação”, mas sim a sua resolução, uma vez que esta implica conhecimento e aplicação de algumas propriedades e de “regras das equações” que alguns deles não dominam ou não se recordam.

Estes estudantes acabam, portanto, por enveredar pela resolução aritmética, apontando variados motivos para as suas escolhas. Cerca de metade dos que seguiram essa alternativa (B) utilizam a expressão “mais concreta” ou outra similar para caracterizar a sua escolha e a comparar com a outra que tinham. Alguns explicam melhor, referindo que se conseguem “logo aperceber de que números estamos a falar”, o que acaba por ser determinante para muitos. Outro reparo relativo a esta resolução é a sua organização, surgindo muitos relatos como “está tudo muito bem organizado e explicado” ou “parece um passo a passo que dá para perceber” ou “a explicação está pela ordem das pistas”.

Cerca de 10% dos estudantes associam esta resolução ao seguimento de um “raciocínio lógico” que exige “pouca matemática” ou “não precisa de conhecimentos prévios”. Esta questão está relacionada com outra apontada por quatro estudantes que referiram que “esta estratégia não envolve grandes contas”, sendo “mais fácil e rápida”. Por fim, importa referir que há três estudantes que a consideram “mais prática, principalmente se estivermos a falar de resolver isto com crianças”.

Esta questão coloca os estudantes a escolher entre duas representações formais: representações simbólicas matemáticas aritméticas ou algébricas. A escolha recai predominantemente sobre as primeiras. Estes valores permitem confirmar que entre os dois tipos de representações simbólicas matemáticas a maioria dos estudantes que participaram no estudo prefere os procedimentos aritméticos, aparentemente porque não exigem tantos conhecimentos prévios, mantendo, todavia, o carácter formal. De qualquer modo, aproximadamente 16% dos estudantes reconhece que a resolução apresentada com recurso às representações aritméticas só é uma alternativa viável porque, neste caso concreto, o número de hipóteses é reduzido, o que possibilita a construção de hipóteses e o seu teste, naquilo que acaba por ser identificado por alguns como uma resolução por tentativa-erro. Reforça-se, assim, o afastamento de representações algébricas, principalmente por parte dos estudantes que assumem dificuldades neste âmbito, tornando-os inseguros a operar com este nível de formalismo.

Estes resultados parecem também combinar com os recolhidos no primeiro momento de resolução individual sem alternativas (ver tabela 3). Para além do predomínio das representações aritméticas já referido, também se observa que todos os estudantes que optaram pelas representações algébricas nesse primeiro instrumento acabaram por ter insucesso na sua resolução. Para além disso, importa mencionar os dois estudantes que assumiram não considerar nenhuma das duas resoluções apresentadas intuitiva ou fácil de compreender, coincidindo com dois dos que deixaram a questão em branco no momento inicial.

De facto, os estudantes preferem as representações aritméticas, o que se prende, muitas vezes, segundo as suas justificações, com a insegurança no campo do conhecimento matemático, principalmente no conhecimento e domínio de procedimentos mais formais, muitas vezes relacionada com experiências negativas com a disciplina que já podem vir a acumular-se há vários anos. Conforme já apontavam Vieira et al. (2022), numa investigação sobre o conhecimento matemático de futuros professores, também neste estudo se constata que a relação com a matemática se vai construindo ao longo do percurso académico. As más experiências e o insucesso podem condicionar o gosto por esta área do saber e implicar muito mais trabalho para se alcançar a compreensão de conceitos, procedimentos, raciocínios, formas de representar. Acredita-se que para suprimir estas limitações que dificultam certamente a capacidade de reconhecer falhas em resoluções ou no próprio raciocínio, é essencial garantir que os futuros professores na sua formação inicial resolvam tarefas matemáticas que poderão apresentar futuramente aos seus alunos. A este propósito, Tatto (2018) refere que os programas de formação inicial de professores devem integrar os tópicos matemáticos a explorar em contextos da realidade escolar na qual os futuros professores atuarão, o que permitirá uma planificação, intervenção e reflexão sobre os mesmos.

Parece que para além da resolução de tarefas, a apresentação de percursos de resolução distintos, como aconteceu neste segundo momento da investigação, pode contribuir para que os futuros professores conheçam modos de pensar e representar alternativos aos seus. Eventualmente pode também promover maior flexibilidade para transitar entre diferentes representações matemáticas, o que dotará os estudantes, de acordo com Allevato e Onuchic (2019), de um conjunto de ferramentas que podem ser importantes e muito poderosas por lhes oferecerem opções alternativas e criativas para resolver problemas. Para além desta transição entre modos de representar distintos, os *Common Core State Standards for Mathematics* (NGA & CCSSO, 2010)

apontam a importância de encontrar relações e correlações entre eles, por exemplo entre uma descrição verbal ou, se preferirmos uma representação simbólica verbal, e uma equação, representação simbólica matemática algébrica. Nesta linha de ideias, esta tarefa de escolha de uma das resoluções, já traça algum caminho, uma vez que se registaram estudantes capazes de relacionar as duas representações distintas, nivelando-as pelo seu grau de formalismo e compreendendo o papel fulcral da menos formal na capacidade de desenvolver corretamente a mais formal.

6. Considerações finais

O trabalho consciente e consistente das capacidades transversais matemáticas, como a resolução de problemas e as representações matemáticas têm, há muitos anos, reconhecida importância no âmbito da educação matemática. É essencial que se promovam práticas capazes de desenvolver capacidades e proficiências nos nossos alunos. Acreditamos, a par de vários estudos que têm vindo a ser publicados, que, para isso, se devem repensar algumas práticas no Ensino Superior, na formação inicial de professores do Ensino Básico, no sentido de incluir atividades que dotem estes estudantes, futuros professores, de ferramentas que lhes permitam realizar esse trabalho. Neste contexto, desenhou-se a presente investigação que se propôs a analisar os diferentes tipos de representações matemáticas utilizados por estudantes da Licenciatura em Educação Básica para resolver um problema com cunho algébrico.

Os estudantes participantes nesta investigação utilizaram predominantemente as representações formais que definimos por representações simbólicas matemáticas aritméticas. A maioria recorre a cálculos horizontais, realizando uma operação de cada vez. A taxa de sucesso no uso destas representações acaba por se revelar abaixo do esperado, sendo inferior a 50%. Há um número significativo de estudantes que inicia este tipo de representações, mas não consegue encontrar resposta para a tarefa, e um valor inferior que corresponde aos estudantes que apresentam respostas incorretas. Estes últimos mostram-se, portanto, incapazes de verificar as suas respostas finais utilizando as representações do tipo aritmético.

Por sua vez, as representações simbólicas matemáticas algébricas, para além de serem menos utilizadas, apresentam uma taxa de sucesso nula. A maioria dos estudantes não privilegia este tipo de representação formal, mas, quando o fazem, não conseguem determinar qualquer resposta ou apresentam respostas incompletas. Quando combinadas com representações aritméticas, naquilo que designamos por representações mistas, a taxa de sucesso aumenta significativamente. Alguns estudantes iniciaram a resolução com representações algébricas, mas, por incapacidade de dar continuidade ao raciocínio, num segundo momento seguiram utilizando representações que lhes garantissem mais segurança. Estes estudantes parecem não sentir muito conforto com representações com este nível de formalidade, temendo a construção de uma equação ou o trabalho com incógnitas. A insegurança vem de maus resultados com a matemática, no geral, ou de más experiências em situações algébricas, em particular, e parece ter muito impacto no desempenho dos participantes deste estudo. No momento de discussão final proporcionado para debater representações, processos e resultados, a grande maioria dos estudantes acaba por afirmar compreender a formalização, depois de apresentada e explicada pelos pares, embora assumam que não seria um percurso escolhido por considerar que é mais difícil de concretizar e mais suscetível a erros no decorrer da resolução.

Estes estudantes utilizaram as representações para diversos fins, desde organizar a informação veiculada no enunciado da tarefa para melhor compreender o problema ou auxiliar na definição de uma estratégia, até concretizar raciocínios, explorar diferentes possibilidades e registá-las, verificar ou refutar respostas ou comunicar ideias aos pares e/ ou à professora. Ao resolver tarefas que

podem ser apresentadas a alunos do Ensino Básico, futuros alunos destes futuros professores, estes últimos puderam aprender de uma forma muito significativa e com sentido sobre os conteúdos que vão ensinar, sobre processos de raciocínio, sobre diferentes tipos de representação. As dificuldades que encontraram podem ser as dificuldades que os seus futuros alunos encontrarão, o que garante que se estão a preparar com mais consistência para aquele que será o seu papel de professores, quer no que diz respeito à planificação de atividades promotoras de construção de conhecimento, quer no âmbito da organização e dinâmica da sala de aula. Os participantes reconheceram a importância da resolução de problemas como o apresentado e valorizaram-no por permitir experimentarem na própria pele o papel de relevo que representações e processos podem ter para a atividade matemática.

Referências

AERA(2011). Code of Ethics. AERA.

Allevato, N., & Onuchic, L. (2019). As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências E Matemática*, 10(2), 1–14. <https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2334>

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico*. Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. <http://hdl.handle.net/10400.26/5566>

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8>

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio d'Água.

Canavarro, A. P. (Coord.) (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Direção-Geral da Educação.

Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. *Teaching Children Mathematics*, 11(2), 97–102. <https://doi.org/10.5951/TCM.11.2.0097>

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Edições Almedina S. A.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197–218). Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178–203). Routledge.

Martins, M., Duarte, N., & Ponte, J. P. (2023). Estudo de aula na formação inicial de professores de matemática: Aspetos-chave que promovem o desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores. *Quadrante*, 32(1), 120–141. <https://doi.org/10.48489/quadrante.28737>

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Author.

- Pinto, E., & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães & A. Folque (Orgs.), *Práticas de investigação em Educação* (pp. 1–17). Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora. <http://hdl.handle.net/10174/8001>
- Preston, R., & Garner, A. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics teaching in the middle school*, 9(1), 38–43.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de investigação em ciências sociais* (3ª ed.). Gradiva.
- Tatto, M. T. (2018). The mathematical education of primary teachers. In M. T. Tatto, M. Rodriguez, W. Smith, M. Reckase, & K. Bankov (Eds.), *Exploring the Mathematical Education of Teachers Using TEDS-M Data* (pp. 205–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92144-0_8
- Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438–445. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0438>
- Velez, I. (2020). *Tarefas na sala de aula: prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas* [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade Lisboa. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/42865/1/ULSD734578_td_Isabel_Velez.pdf
- Vieira, R., Ponte, J. P., & Mata-Pereira, J. (2022). Conhecimento matemático de futuros professores: aprendizados realizados num estudo de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(73), 822–843. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a10>
- Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 110–113. <https://doi.org/10.5951/MTMS.14.2.0110>
- Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children’s mathematical drawings. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 215–227). National Council of Teachers of Mathematics.